10/1/2018.

<u>Ασκηση 1</u> Να προσδιοριστούν τα a_1 και a_2 ώστε ο τύπος Αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ανοιχτός τύπος Newton-Cotes

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

· Για πολυώνυμα μέχρι ποιου βαθμού είναι ακριβής;

Τραπεζίου ακριβής μέχρι $1^{ου}$ βαθμού
Simpson και $\frac{3}{8}$ μέχρι $3^{ου}$ βαθμού

<u>Λύση</u>

Όσο το δυνατό πιο ακριβής σημαίνει ακριβής για πολυώνυμα μηδενικού, $1^{ου}$, $2^{ου}$ βαθμού. κ.ο.κ.

Σημεία : x_0, x_1, x_2, x_3 , $\boxed{x_i = x_0 + i\cdot h}$

Θεωρώ $f(x) = P_0(x) = 1$

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_3} 1\,dx = \Big[x\Big]_{x_0}^{x_3} = \overset{=x_0+3h}{x_3} - x_0 = 3\cdot h$$

$$Q(f) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = a_1 + a_2$$

$\Longleftrightarrow \boxed{a_1 + a_2 = 3h}$

Θεωρώ $f(x) = P_1(x) = x$: $I(f) = \int_{x_0}^{x_3} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_3} = \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_3^2}{1} - \frac{x_0^2}{1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(x_3^2 - x_0^2\right) = \frac{1}{2}(x_3 - x_0)(x_3 + x_0) = \frac{3h}{2}(x_3 + x_0) = \frac{3h}{2}(x_0 + 3h + x_0)$$
$$= \frac{3h}{2}(3h + 2x_0) = 3h\cdot x_0 + \frac{9h^2}{2}$$

$$\rightarrow I(f) = 3hx_0 + \frac{9h^2}{2}$$

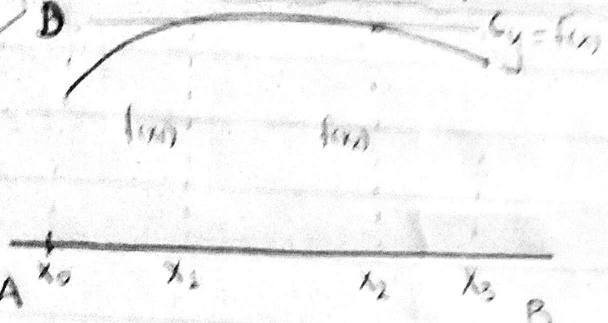
$$Q(f) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1(x_0 + h) + a_2(x_0 + 2h) = (a_1 + a_2)x_0 + h(a_1 + 2a_2)$$
$$= 3hx_0 + (a_1 + 2a_2)\cdot h$$

$$I(f) = Q(f) \rightarrow 3hx_0 + \frac{9h^2}{2} = 3hx_0 + (a_1 + 2a_2)\cdot h \Rightarrow$$

$$\boxed{a_1 + 2a_2 = \frac{9}{2}h}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 3h \\ a_1 + 2a_2 &= \frac{9}{2}h \end{aligned}\right\} \qquad a_2 = 3\frac{h}{2}, \quad a_1 = 3\frac{h}{2}$$

Άρα $\displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3}{2}h\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$ ← Ανοικτός τύπος του τραπεζίου



$$(ABCD) = \frac{3}{2}h\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$$

Θα δω αν ισχύει για πολυώνυμο 2ου βαθμού

$f(x) = P_2(x) = x^2$ $\quad I(f) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_3} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{x_3} = \frac{x_3^3 - x_0^3}{3}$

$$= \frac{3h}{3}(x_3^2 + x_3x_0 + x_0^2) = h\left((x_0+3h)^2 + (x_0+3h)x_0 + x_0^2\right) = 3hx_0^2 + 9h^2x_0 + 9h^3$$

$$\Rightarrow I(f) = 3hx_0^2 + 9h^2x_0 + 9h^3$$

$$Q(f) = \frac{3h}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{3h}{2}\left((x_0+h)^2 + (x_0+2h)^2\right) =$$

$$= 3hx_0^2 + 9h^2x_0 + \frac{15}{2}h^3$$

- Επειδή $9h^3 \neq \frac{15}{2}h^3 \Rightarrow I(f) \neq Q(f)$

→ Οπότε είναι 1ου βαθμού

Άσκηση 2: Να προσδιοριστούν τα a, x_0 και x_1 ώστε ο τύπος Αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq a\left(f(x_0)+f(x_1)\right)$$ να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής.

Για πολυώνυμα μέχρι ποιου βαθμού είναι ακριβής;

Λύση

$f(x)=P_0(x)=1$: $I(1)=\int_{-1}^{1} 1\,dx=[x]_{-1}^{1}=1-(-1)=2$

προσεγγιστικός

$Q(f)= a(1+1)=2a$

$2=2a \Rightarrow \boxed{a=1}$

$f(x)=P_1(x)=x$ $\quad I(f)=\int_{-1}^{1} x\,dx=0$

$Q(f)=a(x_0+x_1)=x_0+x_1$

$\Leftrightarrow$

$\boxed{x_0+x_1=0} \Rightarrow x_0=-x_1$ ή $x_1=-x_0$

$f(x)=P_2(x)=x^2$: $I(f)=\int_{-1}^{1} x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

$Q(x)=x_0^2+x_1^2$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_0^2+x_1^2=\frac{2}{3}}$

Η με $\Leftarrow$ αντικατάσταση $x_0+x_1=0$

$\Leftrightarrow (x_0+x_1)^2=x_0^2+x_1^2+2x_0x_1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}+2x_0x_1=0 \Leftrightarrow x_0x_1=-\frac{1}{3}$

x_0, x_1: είναι ρίζες του τριωνύμου $x^2-(x_0+x_1)x+x_0x_1=x^2-\frac{1}{3}$

$x^2-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 1\cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$f(x)=P_3(x)=x^3$ $\quad I(f)=\int_{-1}^{1} x^3\,dx=0$

$Q(f)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=0$

είναι ακριβής
οποτε συνεχίζω
για 4^o βαθμό

$f(x)=P_4(x)=x^4$

$$\left.\begin{aligned} I(f)&=\int_{-1}^{1} x^4\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}\\ Q(f)&=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4=\frac{2}{9}\end{aligned}\right\} I(f)\neq Q(f)$$

→ Οποτε είναι $3^{ου}$ βαθμού.

<u>Άσκηση 3</u>: Να προσδιοριστούν οι παράμετροι α και β ώστε ο τύπος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha(f(-1)+f(1))+\beta\cdot(f'(-1)-f'(1))$$ να είναι

όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

Για πολυώνυμα μέχρι ποιού βαθμού είναι ακριβής;

<u>Λύση</u>

μηδενικα $f(x)=P_0(x)=1$:

$$\left.\begin{aligned} I(f)&=\int_{-1}^{1} 1\,dx=[x]_{-1}^{1}=2\\ Q(f)&=\alpha(1+1)+\beta(0+0)=\alpha(2)=2\alpha\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$$

$1^{ου}$ βαθμου $f(x)=P_1(x)=x$:

$$\left.\begin{aligned} I(f)&=\int_{-1}^{1} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0\\ Q(f)&=1(-1+1)+\beta(1-1)=0\end{aligned}\right\}$$ Ταυτότητα ισχύει

$2^{ου}$ βαθμου $f(x)=P_2(x)=x^2$:

$$\left.\begin{aligned} I(f)&=\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\\ Q(f)&=1(1+1)+\beta(-2-2)=2-4\beta\end{aligned}\right\} 2-4\beta=\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{\beta=\frac{1}{3}}$$

Άρα $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1))$

3ου βαθμού $f(x) = P_3(x) = x^3$: $I(f) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$

$Q(f) = -1+1+\frac{1}{3}\cdot(3-3) = 0$

ταυτότητα ισχύει

ακριβής τύπος

4ου βαθμού $f(x) = P_4(x) = x^4$: $I(f) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$Q(f) = 1+1+\frac{1}{3}\cdot(-4-4) = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow I(f) \neq Q(f)$

οπότε όχι ακριβής

→ Οπότε είναι 3ου βαθμού.